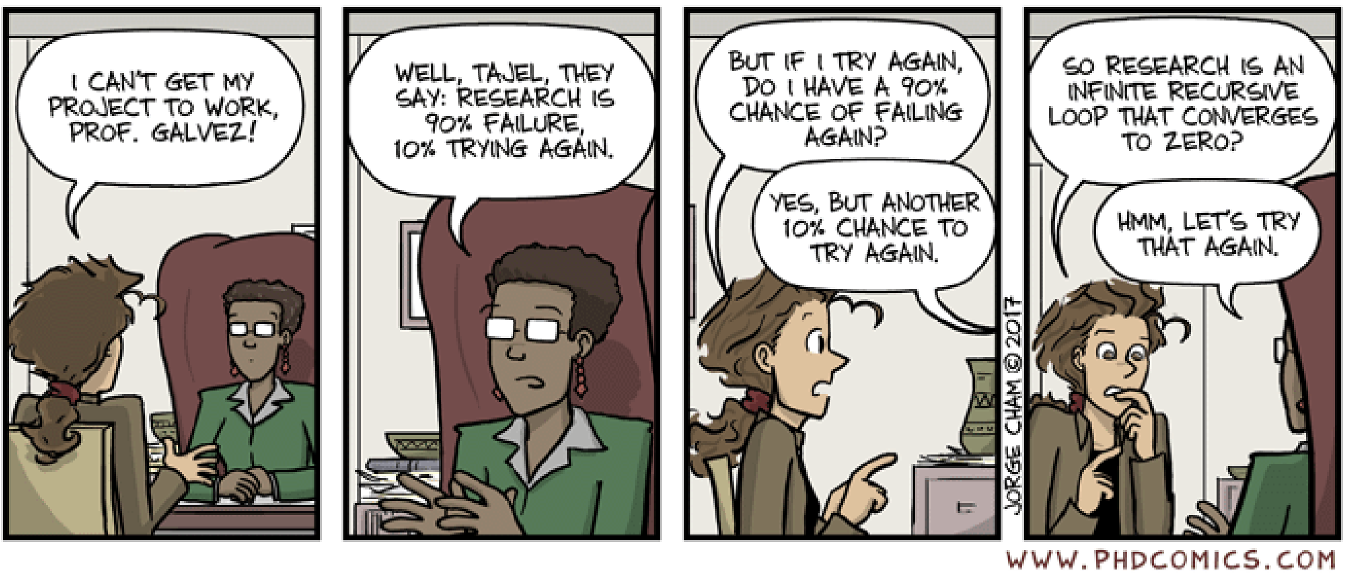
Plus ça rate, plus on a de chances que ça marche

Exercice basé sur cette devise "Shadoks", et pas seulement :



Réf : http://phdcomics.com/comics/archive.php?comicid=1946

Questions

- Combien d'essais seront-ils nécessaires, en moyenne, pour obtenir une réussite, si la probabilité

élémentaire de réussite pour un essai vaut p ?
- Caractériser la distribution ?
- Simuler pour vérifier, représenter la distribution ?
- Application aux jeux de hasard (source : lotterie nationale) : soit un joueur décidant de miser 10 EUR par semaine (8 grilles) dans l'espoir de gagner le gros lot afin de finir ses jours sur une île paradisiaque. Statistiquement, combien de tirages seront nécessaires pour atteindre son objectif ? Quelle somme aura-t-il misé au total ?

Solution

Au premier essai, il existe une probabilité p de réussite. En cas d'échec, on passe au second essai avec une probabilité de $q = 1 - p$, et ce second essai a lui même une probabilité p de réussite. On aura donc la distribution suivante pour les probabilités en fonction du nombre d'essais :

Nombre d'essais	Probabilité
1	p
2	$(1-p)p$
3	$(1-p)^2p$
4	$(1-p)^3p$
5	$(1-p)^4p$
…	…
i	$(1-p)^{i-1}p$
…	…

Pour le calcul de la moyenne du nombre d'essais, cette probabilité $(1-p)p$ doit être multipliée par 2. En poursuivant le raisonnement, on obtient pour la moyenne m :

$$m = 1p + 2(1-p)p + 3(1-p)^2p + 4(1-p)^3p + 5(1-p)^4p + \ldots$$

On peut mettre p en évidence, et utiliser $q = 1 - p$:

$$m = p(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \ldots$$

On remarque que la parenthèse peut s'exprimer comme une dérivée par rapport à q :

$$m = p\frac{d}{dq}(q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots)$$

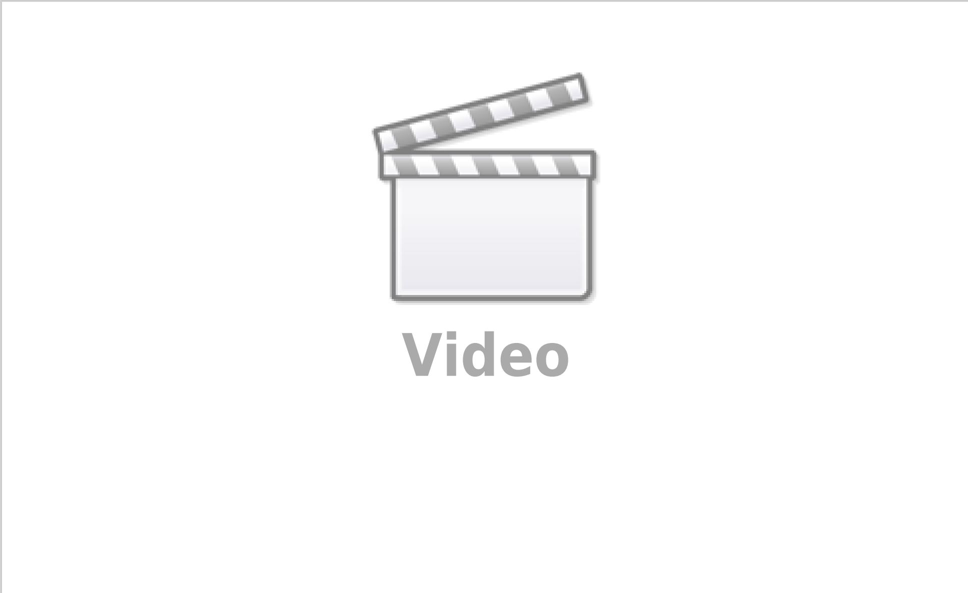
On peut remplacer la série géométrique de raison q, donc :

$$m = p\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q} = 1/p$$

Il est intéressant de vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

Fix Me! : compléter avec une simulation,…

Vidéo



- An Introduction to the Geometric Distribution, par jbstatistics : « I discuss the underlying assumptions that result in a geometric distribution, the formula, and the mean and variance of the distribution. I work through an example of the calculations and then discuss the cumulative distribution function. »

Références

- Loi géométrique sur wikipedia
- Variables aléatoires discrètes : Loi géométrique sur wikiversité