PhysicoChimie II (exercices)

Bachelier en sciences chimiques, troisième année, 30 H exercices du cours (titulaire du cours : P. Damman).

Rappels de probabilités et statistique + quelques applications

Évènements, probabilités : définitions

- **Épreuve ou expérience aléatoire** : processus dont le résultat est incertain (tirage au hasard , jets de dès,…)
- **Évènement** : ensemble de résultats d'une épreuve aléatoire
  - **Évènement élémentaire ou simple** : événement constitué d'un seul élément (*e.g.* avoir un 6 pour le lancer d'un seul dé)
  - **Évènement composé** : union de plusieurs évènements élémentaires (*e.g.* avoir un multiple de 3 lors du lancer d'un seul dé ou de plusieurs dés)
  - **Évènement certain** : union de tous les évènements élémentaires. Sa probabilité vaudra 1
  - **Évènement impossible** : ensemble vide d'évènement {} dont la probabilité sera nulle
  - **Événements incompatibles** : 2 événements sont incompatibles si et seulement si leur réalisation simultanée est impossible
  - **Événements compatibles** : événements dont la réalisation simultanée est possible
  - **Événements indépendants** : évènements tels que la réalisation de l'un n'influence pas la probabilité de réalisation de l'autre
    - Deux événements incompatibles, de probabilité non nulle ne sont jamais indépendants
- **Espace des observables** Ω : ensemble de tous les évènements élémentaires d'une expérience aléatoire (*e.g.* {1,2,3,4,5,6} pour le lancer d'un seul dé)
- **Probabilité** : quantification du caractère probable d'un évènement, nombre réel compris entre 0 et 1. Plus ce nombre est grand, plus le risque, ou la chance, que l'événement se produise est grand.
  - À tout événement élémentaire, E_i correspond une probabilité d'obtenir cet événement, $p(E_i)$
    - $0<p(E_i) < 1$
    - $p(E_i \ ou \ E_j) = p(E_i) + p(E_j) $
    - $\sum_{E_i} p(E_i) =p(\Omega) = 1$
- **Évènements équiprobables** : évènements élémentaires ou composés, dont la probabilité est strictement équivalente
- **Théorie des ensembles et logique booléenne** (dans le cadre des probabilités élémentaires). Soient A et B deux évènements *a priori* composés d'un ensemble d'évènements élémentaires. On aura :
  - si $A=\Omega$ alors $p(A)=1$: évènement certain
  - si $A=\left\{\right\}$ alors $p(A)=0$: évènement impossible (ex. faire 0 au dé)
  - si $A \subset B$ ou en écriture logique $A \Rightarrow B$, alors $p(A) \le p(B)$ *e.g.*faire 2 implique un nombre pair

    - **Loi de multiplication** $A \cap B$ (ET) :
        - A et B sont incompatibles alors $A \cap B = 0$ et $p(A \cap B)=0$: faire un 2 ET un nombre impair
        - A et B sont indépendants alors $p(A \cap B)=p(A) p(B)$: tirer une dame de coeur dans un jeu de 52 cartes = obtenir une dame **ET** avoir la couleur coeur, donc $p=1/13 \ 1/4= 1/52$
    - **Loi d'addition** $A \cup B$ (OU) : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
        - *e.g.* avoir un nombre pair ou un multiple de 3, réponse: 2, 4, 6 et 3 ($p = 4/6$). En terme de probabilités : $p = 1/2 + 1/3 - 1/6 = 2/3$)
        - **Attention!** si A et B sont incompatibles $A \cap B =0$ et $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$}
- **Définition expérimentale de la probabilité d'un événement** :
    - Si on réalise N évènements **indépendants** lors d'une expérience (*e.g.* pile ou face), et si on observe n_i résultats du type E_i, alors $p(E_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} {n_i \over N}$ (*N.B.* : cela peut-être testé facilement par des expériences “pile ou face')

Analyse combinatoire (éléments)

- L'analyse combinatoire étudie les configurations de collections finies d'objets, et les dénombrements.
    - **Permutations sans répétition d'objets discernables** : si vous avez *e.g.* 5 objets différents à placer à 5 emplacements, vous avez 5 possibilités pour placer un des objets en premier lieu, puis, indépendamment 4 autres pour le second objet, 3 pour le troisième, et 2 pour le quatrième. Le cinquième n'a plus qu'une seule possibilité. L'indépendance des placements induit une multiplication des différentes possibilités, soit ici $5\times4\times3\times2\times1$ possibilités. Par généralisation, le nombre de permutations d'un nombre n d'objets discernables vaut factorielle de n et est noté $n!$, avec $n! = \prod_{1\le i\le n} i = 1\times 2\times 3\times \cdots \times (n-1) \times n$
    - Arrangements de p éléments parmi n : si on effectue p tirages successifs parmi un ensemble de p objets différents, le nombre d'arrangements vaut $n (n-1) (n-2) ... (n-p+1)$ et est noté A_n^p. En utilisant les notations factorielles, on a $A_n^p= {n! \over (n-p)}\quad\mbox{avec }p\leq n!$
        - Par exemple, au Lotto, sept boules sont prélevées une par une parmi 45 boules numérotées (de 1 à 45). Cela donne donc $45\times 44\times 43\times 42\times 41\times 40\times 39 = {45! \over 38!}=228713284800$ ou deux cent vingt-huit milliards sept cent treize millions deux cent quatre-vingt-quatre mille huit cents arrangements ou tirages possibles !
    - **Combinaisons sans répétition**
        - En poursuivant l'exemple du lotto, ce jeu attribue des gains [1)] en fonction des numéros des 6 premières boules tirées quelque soit l'ordre de tirage de ces boules, et du numéro de la septième (numéro bonus). Les joueurs remplissent des grilles dont l'unité de base (combinaison de jeu) consiste à indiquer 6 numéros dans une série de 45 avec une mise de 1€. Si on s'intéresse uniquement au “gros lot”, le “rang 1” pour lequel les 6 numéros de la grille correspond exactement au 6 boules tirées, le nombre de combinaisons possibles est obtenu en divisant le nombre d'arrangements de 6 boules tirées parmi 45, divisé par le nombre de permutations de ces 6 boules qui donnent toutes la même combinaison. On a donc ${45! \over

{39! \times 6!}}=(45\times 44\times 43\times 42\times 41\times 40)/(6\times 5\times 4\times 3\times 2) = 8145060$ possibilités !

- En généralisant, le nombre de combinaison est donc obtenu en divisant le nombre d'arrangement par la factorielle du nombre d'objets tirés. On utilise les relations et notations suivantes : $C_n^p = {A_n^p \over p!} = {n! \over (n-p)! p!} = \binom{n}{p}$

Exercices de base

- Lancer d'un dé
- Lancer d'un dé polyédrique
- Tirage d'une carte
- Lancers consécutifs d'un dé
- Lancers de plusieurs dés

Test LaTeX

\begin{eqnarray*} (x + y)^{n+1} &=& (x+y) \ \sum_{p=0}^n C_n^p \ x^p \ y^{n-p}\\ &=& x^{n+1} + x \sum_{p=0}^{n-1} C_n^p \ x^p \ y^{n-p} + y^{n+1} + y \sum_{p=1}^n C_n^p \ x^p \ y^{n-p}\\ &=& x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{p=1}^n \left[C_n^p + C_n^{p-1}\right] \ x^p \ y^{n-p+1} \\ &=& x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{p=1}^n C_{n+1}^p \ x^p \ y^{n+1-p} \\ &=& \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p \ x^p \ y^{n+1-p} \end{eqnarray*}

Exercices classiques (et similaires)

- Paradoxe des anniversaires
- Marche aléatoire symétrique à 1D (nombre réduit de pas)
- Marche aléatoire asymétrique à 1D (grand nombre de pas)
- Production de flacons : statistiques sur les défauts

Exercices inédits

- Synthèse de molécules en étoile : statistiques
- Conformères d'alcanes linéaires : statistiques et entropie configurationnelle
- Marche aléatoire bidimensionnelle de cellules dans des canaux microfluidiques

Thermodynamique statistique

Références diverses

- Théorie des probabilités (Wikipédia)
- Algèbre de Boole (Wikipédia)
- Approfondissements de lycée en mathématiques, probabilités discrètes (wikibooks)
- La physique de l'eau dans les arbres (yc vidéo)

[1]

en fait statistiquement des “pertes” puisque le taux de redistribution est d'environ 50%