Paradoxe des anniversaires

Énoncé

- Quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour dans un groupe de 40 personnes ?

Solution

Il est plus simple de passer par le calcul de la probabilité complémentaire Pcomp(N), que toutes les N personnes présentes aient leur anniversaire des jours différents. Si on considère une personne à la fois, on multipliera les probabilités indépendantes d'"avoir un anniversaire un jour différent des personnes précédentes" :

- Pcomp(1) = 1 = 365/365 (trivial pour une seule personne)
- Pcomp(2) = (365/365) * (364/365) (pour la deuxième personne, seuls 364 jours sur 365 sont adéquats pour avoir des dates différentes)
- Pcomp(3) = pcomp(2) * (363/365) = 1 * (364/365) * (363/365) (pour la troisième personne, seuls 363 jours sur 365 sont adéquats pour avoir des dates différentes)
- …
- Pcomp(N) = (365 * 364 * 363 * … * (365 - N + 1)/ (365)^N = (365)! / ((365-N)! * (365)^N)

Pour 40 personne, la réponse 1-Pcomp(40) = 0.89123

Remarque : discuter de la non-validité de l'approximation de Stirling utilisée.

Programme Python

<sxh python;> #!/usr/bin/python # -*- coding: UTF-8 -*- """ Petit programme destiné à répondre à la question suivante : - Quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour dans un groupe de 40 personnes. Hypothèses : l'année fait 365 jours et les naissances des personnes se distribuent uniformément (pas de jumeaux,…) Remarque : la solution doit pouvoir être généralisée ! """

from math import log, exp

nombre de possibilités différentes # (= nombre de jours d'une année dans les exemples) poss=365

nombre d'items (personnes présentes) n=40

solution : p = poss ! / ((poss-n) ! * poss^n)

pcomp=1. for i in range(poss, poss-n, -1):

```
  pcomp=pcomp*i/poss
```

print “calcul exact : ”,pcomp, 1.-pcomp

calcul suivant l'approximation de Stirling (ln(j!) ~= j ln(j) - j # l'approximation est d'autant plus valable que poss est grand et n « poss pcomps=exp(poss*log(poss)-poss - (poss-n)*log(poss-n) + (poss-n) - n*log(poss))

print “Approximation de Stirling : ”,pcomps, 1.-pcomps </sxh>

Problème analogue

- Quelle est la probabilité de recevoir 40 cartes cadeaux différentes (aucun “double”) sur 216 types différents de cartes distribuées comme jeu-concours aux caisses d'un supermarché
- Si ce genre d'événement se produit fréquemment, que pouvez-vous en conclure ?
- Discuter des stratégies appliquées par les personnes qui organisent ce genre de jeu-concours

Références

- http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_des_anniversaires
- http://en.wikipedia.org/wiki/Birthday_problem